MA2 – poznámky k přednášce 9.3.2020 (dodatek)

Soustavy obyčejných lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu
(zatím jen úvod)

Definice "soustavy diferenciálních rovnic" (formulace problému)
" jsou dány funkce $a_{ij}(t) \in C(a,b)$, $i,j = 1,..n$,
$f_i(t) \in C(a,b)$ – máme „najít" $\underline{n}$ funkce
$x_1(t), .. x_n(t)$, $x_i(t) \in C^{(1)}(a,b)$ tak, aby v (a,b)
platilo:

$$(1) \quad \begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \dots + a_{2n}(t)x_n(t) + f_2(t) \\ --- \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t) \end{cases}$$

Je-li $t_0 \in (a,b)$ a $(x_1^0; .. x_n^0) \in R^n$, pak úloha
najít řešení soustavy (1), pro které platí

$$(2) \qquad x_1(t_0) = x_1^0, \; x_2(t_0) = x_2^0, \; .. , x_n(t_0) = x_n^0$$

se (opět) nazývá počáteční (Cauchyho) úlohou
pro soustavu (1).

Zjednodušme zápis problému (1), (2) pomocí pojmů
a symbolů lineární algebry:

označme matici $(a_{ij}(t))_{i,j=1,2,.n} = A(t)$, $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$

$$f(t) \in C_n(a,b)$$

dále, $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, $x'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$ a $p = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} \in R^n$

($\in C_n^{(1)}(a,b)$ - volíme toto značení)

Pak soustavu (1) s počátečními podmínkami (2) lze zapsat:

$?\ x = x(t)$ tak, aby $x'(t) = A(t)\cdot x(t) + f(t)$, $t \in (a,b)$
$\underline{x(t_0) = p \quad , t_0 \in (a,b)}$

<u>A nyní - opět "radí" lineární algebra:</u>

1) zobrazení $x(t) \in C_n^{(1)}(a,b) \to x'(t) - A(t)x(t) \in C_n(a,b)$
je lineární zobrazení a tedy

2) lze rovnici $x'(t) - A(t)x(t) = f(t)$
řešit opět ve třech krocích:

a) $x'(t) - A(t)x(t) = 0$ (soustava homogenní)

b) najít jedno řešení $x_p(t)$ rovnice „celé",
tj. $x_p'(t) - A(t)x_p(t) = f(t)$

c) řešení soustavy homogenní tvoří vektorový prostor, a lib. řešení nehomogenní soustavy lze vyjádřit jako $x(t) = x_0(t) + x_p(t)$,
kde $x_0(t)$ je řešení soustavy homogenní.

A teorie" diferenciálních rovnic opět „dobrá" věta o" existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyho úlohy pro soustavu (1).

<u>Věta</u> Nechť

1) $a_{ij}(t)$, $i,j=1,2,\dots n$, $f_i(t)$, $i=1,\dots,n$ jsou funkce spojité v (a,b)

2) $t_0 \in (a,b)$ a $p \in R^n$.

Pak počáteční úloha

$$(1) \qquad x'(t) = A(t)\,x(t) + f(t), \qquad x(t_0) = p$$

má právě jedno řešení $x(t) \in C_n^{(1)}(a,b)$ (tj. existuje právě jedno řešení rovnice (1), které splňuje $x(t_0)=p$)

<u>A nyní</u> - pro „jednoduché" soustavy, když $A(t)=A$ (A - matice konstant), tj. t.zv. <u>soustavy s konstantními koeficienty se pokusíme najít „návod"</u>, jak řešení nalézt.

Ukážeme si na příkladech (co nejjednodušších) cestu" k návodu, pak obecně (co se dá „pochopit")

Jednoduchý problém – soustava dvou rovnic pro dvě neznámé funkce $x_1(t), x_2(t)$, a řešíme homogenní soustavu:

<u>Příklad 1.</u> (nejjednodušší)

$$x_1'(t) = x_1(t) \qquad (ZS) \qquad x_1(t) = c_1 e^{t} \quad c_1, c_2 \in R$$
$$x_2'(t) = 4x_2(t) \qquad\qquad x_2(t) = c_2 e^{4t}, \quad t \in R$$

? <u>jsou řešení všechna</u> („pomůže existenční věta")

$t_0 \in R$, $p_1, p_2 \in R$ – hledáme řešení $x_1(t), x_2(t)$ tak, aby $x_1(t_0) = p_1$ a $x_2(t_0) = p_2$; tj.

$$p_1 = c_1 e^{t_0} \Rightarrow c_1 = p_1 e^{-t_0}$$
$$p_2 = c_2 e^{4t_0} \Rightarrow c_2 = p_2 e^{-4t_0}, \text{ tedy}$$

$$x_{1\,poč}(t) = p_1 e^{t-t_0}, \quad x_{2\,poč}(t) = p_2 e^{4(t-t_0)}, \quad t \in R,$$

a tedy (z věty o existenci řešení) máme všechna řešení.

<u>Zkusme „vektorový" zápis řešení soustavy:</u>

(chápeme množinu řešení dané soustavy jako vektorový podprostor prostoru $C_2^{(1)}(R)$)

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{t} \\ c_2 e^{4t} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^{t} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{4t} \end{pmatrix} \quad (*)$$

tj. $$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Matice $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix} = V(t)$ je matice regulární

$$(\det V(t) = e^t \cdot e^{4t} = e^{5t} \neq 0 \quad \forall t \in R)$$

tj. vektory $\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ e^{4t} \end{pmatrix}$ jsou LNZ a tedy (viz (*))

tvoří bázi prostoru řešení homogenní soustavy.

<u>Řešení počáteční úlohy:</u> $x(t_0) = p$

tj. hledáme $(c_1, c_2) = \vec{c}$ tak, aby $p = V(t_0) \cdot c$, tj.:

$$c = V^{-1}(t_0) \cdot p \quad , \text{ a}$$

pak řešení počáteční úlohy je

$$x_{\text{poč}}(t) = V(t) \cdot V^{-1}(t_0) \cdot p$$

Matice <u>$U(t, t_0) = V(t) V^{-1}(t_0)$ – nazývá se standardní matice pro počáteční úlohu</u>,

platí: $U(t_0, t_0) = I$

a <u>matice $V(t)$ – nazývá se fundamentální matice soustavy</u> (dané zde i obecně)

<u>Příklad 2</u> (trochu „komplikovanější", ale stále jednoduchý)

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad x_1'(t) = x_2(t), \quad x_1(t_0) = p_1 \\
&(2)\quad x_2'(t) = 4x_1(t), \quad x_2(t_0) = p_2, \quad t_0 \in R
\end{aligned}
$$

Jak „vyřešíme" – zkusme (analogie řešení soustav lin. rovnic v LA) metodou eliminace:

z (1) do (2): $\quad x_1''(t) - 4x_1(t) = 0$ – rovnice lineární 2. řádu – umíme!

ch. r. $\quad \lambda^2 - 4 = 0$

tj. $\lambda_{1,2} = \pm 2$ a

$$x_1(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}, \quad t \in R$$

a pak $(x_2(t) = x_1'(t))$

$$x_2(t) = 2c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{-2t}$$

<u>Vektorový „zápis"</u>

$$
\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} \\ 2c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{-2t} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{-2t} \end{pmatrix}
$$

tedy opět lze vyjádřit řešení

$$
\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}, & e^{-2t} \\ 2e^{2t}, & -2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},
$$

kde

$$
V(t) = \begin{pmatrix} e^{2t}, & e^{-2t} \\ 2e^{2t}, & -2e^{-2t} \end{pmatrix}
$$

– fundamentální matice (regulární)

a tedy zapíšeme vektorově: $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

$$x(t) = V(t) \cdot c \quad , \; t \in R, \; c \in R^2$$

a řešení počáteční úlohy $x(t_0) = p$ je

$$\underline{x_{pč}(t) = V(t) \cdot V^{-1}(t_0) \cdot p}$$

Př: Standardní matice pro $t_0 = 0$

$$\mathcal{U}(t,0) = \begin{pmatrix} e^{2t} & , & e^{-2t} \\ 2e^{2t} & , & -2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= +\frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{2t} & , & e^{-2t} \\ 2e^{2t} & , & -2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +2 & +1 \\ +2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2e^{2t} + 2e^{-2t} & , & e^{2t} - e^{-2t} \\ 4e^{2t} - 4e^{-2t} & , & 2e^{2t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

(a zkouška - $\mathcal{U}(0,0) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = I$)

a počáteční podmínky $p = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ - pak $x_{pč}(t) = \mathcal{U}(t,0) \cdot p$, tj:

$$x_{pč}(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2e^{2t} + 2e^{-2t} & , & e^{2t} - e^{-2t} \\ 4e^{2t} - 4e^{-2t} & , & 2e^{2t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4e^{-2t} \\ -8e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$t \in R$

A cesta od příkladů k „obecnému" návodu:
Řešení homogenní soustavy (v našem příkladu 2) je dáno lineární kombinací vektorů

$$v_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} \quad a \quad v_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

Vektory $v_1(t)$ a $v_2(t)$ jsou LNZ, tj. tvoří bázi prostoru řešení dané soustavy, a mají „tvar"

$$„\underline{v(t) = v \cdot e^{\lambda t}}", \quad v \text{ – konstantní vektor}$$

Zkusme hledat řešení soustavy (A – matice konstantní)

$$(*) \quad \underline{x'(t) = A \cdot x(t)}$$

ve tvaru $\underline{x(t) = v \cdot e^{\lambda t}}$ – (jako u OLDR 2. řádu)
– pak (asi ?) $x'(t) = v \cdot \lambda e^{\lambda t}$ a dosazením do rovnice (*) dostáváme:

$$\lambda v e^{\lambda t} = A v e^{\lambda t}, \text{ tj.}$$

$$\underline{Av = \lambda v} \quad !$$

Tedy „maticovou" úlohu najít vlastní čísla a vlastní vektory matice A a z nich „vytvořit" řešení dané úlohy – „pěkně" ! – obecný návod (pro jednoduchý případ – vlastní čísla matice A reálná a různá)

Zkusme v našem příkladu:

Máme soustavu
$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$
, hledejme vlastní čísla a vlastní vektory matice A:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 4 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 4 = 0,$$

tj. vlastní čísla matice A jsou $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2$;

Vlastní vektory: $v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix},\quad v_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix}$
:

$\lambda_1 = 2$: $\quad -2v_{11} + v_{21} = 0 \Rightarrow v_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \neq 0;$

$\lambda_2 = -2$: $\quad 2v_{21} + v_{22} = 0 \Rightarrow v_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ t \neq 0;$

tj. (stačí $t=1$) máme řešení

$$v_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} \quad \text{a} \quad v_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2t},$$

a tedy (opět) fundamentální matice je

$$V(t) = \begin{pmatrix} e^{2t}, & e^{-2t} \\ 2e^{2t}, & -2e^{-2t} \end{pmatrix}$$